



TITLE:

The existence of the solution of the initial value problem for the semilinear Schrodinger equation in Besov spaces (Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations)

AUTHOR(S):

田岡, 志婦

CITATION:

田岡, 志婦. The existence of the solution of the initial value problem for the semilinear Schrodinger equation in Besov spaces (Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations). 数理解析研究所講究録 2001, 1235: 1-21

ISSUE DATE:

2001-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/41529>

RIGHT:

The existence of the solution of the initial value problem for the semilinear Schrödinger equation in Besov spaces

中央大学理工学研究科 田岡志婦
(Shifu Taoka, Chuo University)

1 定義と主な結果

Kenig-Ponce-Vega ([6]) は, Bourgain の Fourier restriction norm,

$$(1.1) \quad \|f\|_{X_{s,b}} = \|(1 + |\tau - \xi^2|)^b (1 + |\xi|)^s \hat{f}(\xi, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

(\hat{f} は f の Fourier 変換) を用いて, $s > -3/4$ のとき, 評価,

$$(1.2) \quad \|fg\|_{X_{s,b-1}} \leq c \|f\|_{X_{s,b}} \|g\|_{X_{s,b}},$$

$$(1.3) \quad \|\bar{f}\bar{g}\|_{X_{s,b-1}} \leq c \|f\|_{X_{s,b}} \|g\|_{X_{s,b}},$$

(ここで, $b > 1/2$ とする)

を示して, 初期値 $u(x, 0) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{R})$, $s > -3/4$ に対して, $N(u, \bar{u}) = u^2$ または, $N(u, \bar{u}) = \bar{u}^2$ のとき, 半線型 Schrödinger 方程式

$$(1.4) \quad \partial_t u = i\partial_x^2 u + N(u, \bar{u}), \quad x, t \in \mathbb{R},$$

の時間局所解の存在を証明し, $s < -3/4$ のとき (1.2) と (1.3) は成立しないことを示した.

一方, Nakanishi-Takaoka-Tsutsumi ([8]) は $s = -3/4$ のとき (1.2) と (1.3) は成立しないことを示した.

この Sobolev 型ノルムに対応する Besov 型ノルムを用いるとさらによい結果が得られることがわかった. 対応する Besov 型ノルムは次のように定義する:

定義 1 ρ を \mathbb{R}_+ 上の重みの関数, $b \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $P(\xi)$ を C^∞ 級実数値関数として, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ に対して,

$$(1.5) \quad \|f\|_{B_{p,q,P}^{(\rho,b)}} := \|\{\rho(2^j)2^{bk} \|f_{jk}(x, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d+1})}\}\|_{\ell^q}$$

と定義し, 空間 $B_{p,q,P}^{(\rho,b)}(\mathbb{R}^{d+1})$ をこのノルムが有限な $f \in S'(\mathbb{R}^{d+1})$ の全体と定義する.
 特に, $\rho(t) = t^s$ のとき $B_{p,q,P}^{(s,b)}(\mathbb{R}^{d+1})$ と書く.
 ただし, $\hat{f}_{jk}(\xi, \tau) = \varphi_j(|\xi|)\varphi_k(\tau - P(\xi))\hat{f}(\xi, \tau)$ で, $\varphi_j(z), j = 0, 1, \dots$ は次をみたす $z \in \mathbb{R}$ の C^∞ 級関数である.

$$\begin{aligned}\varphi_j(z) &= \varphi_j(-z), \text{supp}\varphi_0 \subset \{z; |z| < 2\}, \text{supp}\varphi_1 \subset \{z; 1 < |z| < 4\}, \\ \varphi_k(z) &= \varphi_1(2^{-k+1}z), (for), k \geq 1 \quad \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(z) = 1.\end{aligned}$$

また, ℓ^q は (j, k) を添字とする数列についての ℓ^q 空間である.

容易に次の二つの定理が分かる:

定理 1 任意の α とある c_α に対して, $|\partial_\xi^\alpha P(\xi)| \leq c_\alpha(1+|\xi|)^{\nu-|\alpha|}$ が成り立つような実数 $\nu \geq 1$ が存在すると仮定すると, $B_{p,q,P}^{(\rho,b)}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ は Banach 空間で, $p < \infty, q < \infty$ であれば $S(\mathbb{R}^{d+1})$ は $B_{p,q,P}^{(\rho,b)}(\mathbb{R}^{d+1})$ の稠密部分集合である.

定理 2 $B_{2,1,P(\xi)}^{(\rho,1/2)}(\mathbb{R}^{d+1}) \subset C(\mathbb{R}; B_{2,1}^\rho(\mathbb{R}^d))$.

t_0 について $\|f(\cdot, t_0)\|_{B_{2,1}^\rho(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{B_{2,1,P(\xi)}^{(\rho,1/2)}(\mathbb{R}^{d+1})}$.

定理 3 $-3/4 \leq s < 0, \rho(t) = \log(2+t)t^s, P(\xi) = \xi^2$ または $-\xi^2, Q$ は P または $-P$ とすると, 次の評価が成り立つ. ただし, $b > 1/2, s' > -3/4$.

$$(1.6) \quad \|fg\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,-1/2)}} \leq c\|f\|_{B_{2,1,Q}^{(\rho,1/2)}}\|g\|_{B_{2,1,Q}^{(s,1/2)}},$$

$$(1.7) \quad \|fg\|_{B_{2,1,P}^{(s,-1/2)}} \leq c\|f\|_{B_{2,1,Q}^{(s',1/2)}}\|g\|_{B_{2,1,Q}^{(s',1/2)}},$$

$$(1.8) \quad \|fg\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,-1/2)}} \leq c\{\|f\|_{B_{2,1,P}^{(s,b)}}\|g\|_{B_{2,1,Q}^{(s,1/2)}} + \|f\|_{B_{2,1,Q}^{(s,1/2)}}\|g\|_{B_{2,1,Q}^{(s,b)}}\},$$

$P(-\xi) = P(\xi)$ のとき, 定義からただちに $\|\bar{f}\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,1/2)}} = \|f\|_{B_{2,1,-P}^{(\rho,1/2)}}$ がわかるから,

定理 4 $P(\xi) = \pm\xi^2, \rho(t) = \log(2+t)t^{-3/4}$ とすると,

$$(1.9) \quad \|c_1fg + c_2\bar{f}\bar{g}\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,-1/2)}} \leq \begin{cases} c\|f\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,1/2)}}\|g\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}}, \\ c\{\|f\|_{B_{2,1,P}^{(s,b)}}\|g\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}} + \|f\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}}\|g\|_{B_{2,1,P}^{(s,b)}}\}, \end{cases}$$

が成り立つ. ただし, $b > 1/2$ とする.

定理 5 ρ を \mathbb{R}_+ 上の重みの関数, $b \in \mathbb{R}, P(\xi)$ を実数値 C^∞ 関数とし, $W(t)$ を $W(t)f(x) := \mathcal{F}_x^{-1}e^{itP(\xi)}\mathcal{F}_x f(x, t)$ と定義する.

(a) $u_0 \in B_{2,1}^{\rho}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in B_{2,1}^b(\mathbb{R})$ とすると, $\psi(t)W(t)u_0 \in B_{2,1,P}^{(\rho,b)}(\mathbb{R}^{d+1})$ となり次の不等式が成り立つ:

$$(1.10) \quad \|\psi(t)W(t)u_0\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,b)}(\mathbb{R}^{d+1})} \leq \|u_0\|_{B_{2,1}^{\rho}(\mathbb{R}^d)} \|\psi\|_{B_{2,1}^b(\mathbb{R})}.$$

(b) $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とすると, $b \geq 1/2$ のとき,

$$(1.11) \quad \|\psi(t) \int_0^t W(t-t')f(x,t')dt'\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,b)}(\mathbb{R}^{d+1})} \leq c\|f\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,b-1)}(\mathbb{R}^{d+1})}$$

が成り立つ. ただし, c は f に独立な定数である.

定理 6 p を正の整数, $s \leq 0$, $\delta = 2^{-p}$ とすると,

$$(1.12) \quad \|f(\delta x)\|_{B_{2,1}^s(\mathbb{R}^d)} \leq \delta^{s-d/2} \|f\|_{B_{2,1}^s(\mathbb{R}^d)}$$

が成り立つ.

主定理

$N(u, \bar{u}) = c_1 u^2 + c_2 \bar{u}^2$, $u(x, 0) = u_0(x) \in B_{2,1}^{-3/4}(\mathbb{R})$ と仮定すると, $|t| \leq T$ で方程式 (1.4) を満たす $T = T(\|u_0\|_{B_{2,1}^{-3/4}(\mathbb{R})})$ と $u(x, t) \in B_{2,1,-\xi^2}^{(-3/4, 1/2)}(\mathbb{R}^2)$ が存在する.

2 積分作用素のノルム

積分作用素の有界性を示すには次の補題が便利である:

補題 2.1 (Ω_j, μ_j) , $j = 1, 2$, を σ -有界測度空間とし, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, X と Y を Banch 空間とする. $1/p + 1/p' = 1$ とする. ($p = 1$ のときは $p' = \infty$, $p = \infty$ のときには $p' = 1$ とする). $K(x, y)$ を 積測度空間 $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \times \mu_2)$ 上の $\mathcal{L}(X, Y)$ -値 強可測関数とし, 非負値可測関数 $H_1(x, y)$ と $H_2(x, y)$ で,

$$(2.1) \quad \|K(x, y)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq H_1(x, y)H_2(x, y),$$

$$(2.2) \quad \text{ess. sup}_{y \in \Omega_2} \|H_1(x, y)\|_{L^q(\Omega_1, \mu_1)} = C_1 < \infty$$

$$(2.3) \quad \text{ess. sup}_{x \in \Omega_1} \|H_2(x, y)\|_{L^{p'}(\Omega_2, \mu_2)} = C_2 < \infty$$

を満たす H_1 と H_2 が存在すると仮定する. このとき, 積分作用素

$$(2.4) \quad Tf(x) = \int_{\Omega_2} K(x, y)f(y)d\mu_2(y)$$

は $L^p(\Omega_2, \mu_2; X)$ から $L^q(\Omega_1, \mu_1; Y)$ への有界作用素で, そのノルムは $C_1 C_2$ を越え

証明. [1] Theorem 6.3 (p. 239), [7] p. 38 を参照.

補題 2.2

$$\left\| \iint H(\xi, \tau, \xi_1, \tau_1) \hat{f}(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1) \hat{g}(\xi_1, \tau_1) d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L^2} \leq C \|\hat{f}\|_{L^2} \|\hat{g}\|_{L^2}$$

ただし, C は,

$$C_1 = \sup_{\xi_1, \tau_1} \left(\int |H(\xi, \tau, \xi_1, \tau_1)|^2 d\xi d\tau \right)^{1/2}, \quad C_2 = \sup_{\xi, \tau} \left(\int |H(\xi, \tau, \xi_1, \tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 \right)^{1/2} \text{ のどちらでもよい.}$$

証明. $H_1(\xi, \tau, \xi_1, \tau_1) = H(\xi, \tau, \xi_1, \tau_1)$, $H_2(\xi, \tau, \xi_1, \tau_1) = \hat{f}(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1)$ にとり, 補題 2.1 を使うと, $C_1 \|\hat{f}\|_{L^2} \|\hat{g}\|_{L^2}$ で評価でき, $H_1(\xi, \tau, \xi_1, \tau_1) = \hat{g}(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1)$, $H_2(\xi, \tau, \xi_1, \tau_1) = H(\xi, \tau, \xi - \xi_1, \tau - \tau_1)$ にとり, 補題 2.1 を使うと, $C_2 \|\hat{f}\|_{L^2} \|\hat{g}\|_{L^2}$ で評価できる.

3 いくつかの補題

C^∞ 実数値関数 P と $f \in S'$ に対して, $\varphi_{jk,P}(\xi, \tau) := \varphi_j(\xi) \varphi_k(\tau - P(\xi))$, $\hat{f}_{jk,P}(\xi, \tau) := \varphi_{jk,P}(\xi, \tau) \hat{f}(\xi, \tau)$ と書くことにする.

補題 3.1 $P, Q, R : C^\infty$ 実数値関数 とすると,

$$(3.1) \quad \|\hat{f}_{jk,P} \hat{g}_{\ell m,Q}\|_{L^2} \leq c 2^{(k \wedge m + j \wedge \ell)/2} \|\hat{f}_{jk,P}\|_{L^2} \|\hat{g}_{\ell m,Q}\|_{L^2},$$

$$(3.2) \quad \|\varphi_h(\xi) \hat{f}_{jk,P} * \hat{g}_{\ell m,Q}\|_{L^2} \leq c 2^{(h+k \wedge m)/2} \|\hat{f}_{jk,P}\|_{L^2} \|\hat{g}_{\ell m,Q}\|_{L^2},$$

$$(3.3) \quad \|\varphi_{hn,P}(\xi, \tau) \hat{f}_{jk,Q} * \hat{g}_{\ell m,R}\|_{L^2} \leq c 2^{(h+n)/2} \|\hat{f}_{jk,Q}\|_{L^2} \|\hat{g}_{\ell m,R}\|_{L^2},$$

ただし, $j \wedge \ell = \min\{j, \ell\}$.

証明. γ_j を $j > 0$ のときは, $[2^{j-1}, 2^{j+1}] \cup [-2^{j+1}, -2^{j-1}]$ の定義関数, γ_0 は $[-2, 2]$ の定義関数とする.

$$(3.4) \quad H_{P,Q}(\xi, \tau, \xi_1, \tau_1) = \gamma_j(\xi_1) \gamma_\ell(\xi - \xi_1) \gamma_k(\tau_1 - P(\xi_1)) \gamma_m(\tau - \tau_1 - Q(\xi - \xi_1)).$$

とおくと,

$$(3.5) \quad \hat{f}_{jk,P} * \hat{g}_{\ell m,Q}(\xi, \tau) = \iint H_{P,Q}(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \hat{g}_{\ell m,Q}(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1) \hat{f}_{jk,P}(\xi_1, \tau_1) d\xi_1 d\tau_1.$$

であるから、不等式

$$\begin{aligned} \iint |H_{P,Q}(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 &\leq \int \gamma_\ell(\xi - \xi_1) d\xi_1 \int \gamma_m(\tau - \tau_1 - Q(\xi - \xi_1)) d\tau_1 \\ &\leq 2^{\ell+m+4} \\ \iint |H_{P,Q}(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 &\leq \int \gamma_j(\xi_1) d\xi_1 \int \gamma_m(\tau - \tau_1 - Q(\xi - \xi_1)) d\tau_1 \\ &\leq 2^{j+m+4} \end{aligned}$$

が成り立つ。従って、このことと 補題 2.2 より、

$$\|f_{jk,P} g_{\ell m,Q}\|_{L^2} = \sqrt{2\pi} \|\hat{f}_{jk,P} * \hat{g}_{\ell m,Q}\|_{L^2} \leq c 2^{(m+j\wedge\ell)/2} \|f_{jk,P}\|_{L^2} \|g_{\ell m,Q}\|_{L^2}.$$

が成り立ち、また、 $f_{jk,P} g_{\ell m,Q} = g_{\ell m,Q} f_{jk,P}$ であるから、

$$\|f_{jk,P} g_{\ell m,Q}\|_{L^2} \leq c 2^{(k+j\wedge\ell)/2} \|f_{jk,P}\|_{L^2} \|g_{\ell m,Q}\|_{L^2} \text{ も得られ、(3.1) がわかった。}$$

同様に、

$$\begin{aligned} \iint |\varphi_h(\xi, \tau) H_{P,\pm Q}(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1)|^2 d\xi d\tau &\leq \int |\varphi_h(\xi)|^2 \gamma_m(\tau - \tau_1 - Q(\xi - \xi_1)) d\xi d\tau \\ &\leq 2^{h+m+2}, \end{aligned}$$

から、(3.2) が成り立ち、(3.3) もまた、

$$\iint |\varphi_{hn,P}(\xi, \tau) H_{Q,R}(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1)|^2 d\xi d\tau \leq \int |\varphi_{hn,P}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \leq 2^{n+h+2},$$

$$\iint |\varphi_{hn,P}(\xi, \tau) H_{Q,R}(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1)|^2 d\xi d\tau \leq \int |\varphi_n(\tau - P(\xi)) \gamma_\ell(\xi - \xi_1)|^2 d\xi d\tau \leq 2^{n+\ell+2},$$

および、 $\hat{f}_{jk} * \hat{g}_{\ell m} = \hat{g}_{\ell m} * \hat{f}_{jk}$ によって得られる。

補題 3.2 $P(\xi) = \pm \xi^2$ とすると、

$$(3.6) \quad \|f_{jk,P} g_{\ell m,P}\|_{L^2} \leq c 2^{(k\wedge m/2)+(k\vee m/4)} \|f_{jk,P}\|_{L^2} \|g_{\ell m,P}\|_{L^2}.$$

ここで、 $j \vee \ell = \max\{j, \ell\}$ とする。

$|j - \ell| \geq 3$ と仮定すると、

$$(3.7) \quad \|f_{jk,P} g_{\ell m,P}\|_{L^2} \leq c 2^{(k+m-j\vee\ell)/2} \|f_{jk,P}\|_{L^2} \|g_{\ell m,P}\|_{L^2}.$$

証明. (3.4) で定義した $H_{P,Q}(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1)$ に対して $Q = P$ としても、(3.5) が成り立つ。

$\sigma_1 = \tau_1 - P(\xi_1)$ とおき、

$$(3.8) \quad \eta_1 = \tau - \sigma_1 - P(\xi_1) - P(\xi - \xi_1)$$

と変数変換する. $|\frac{d\eta_1}{d\xi_1}| = |2\xi - 4\xi_1|$ であるから,

$$\begin{aligned} & \int \gamma_m(\tau - \sigma_1 - P(\xi_1) - P(\xi - \xi_1)) d\xi_1 \\ & \leq \int_{|\xi_1 - \xi/2| < 2^{m/2-1}} d\xi_1 + \int_{|\xi_1 - \xi/2| \geq 2^{m/2-1}} \gamma_m(\tau - \sigma_1 - P(\xi_1) - P(\xi - \xi_1)) d\xi_1 \\ & \leq 2^{m/2} + 2^{-m/2-1} \int \gamma_m(\eta_1) d\eta_1 \\ & \leq 2^{m/2} + 2^{-m/2+m} = 2^{m/2+1} \end{aligned}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} \iint |H_{P,P}(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 & \leq \int \gamma_k(\sigma_1) d\sigma_1 \gamma_m(\tau - \sigma_1 - P(\xi_1) - P(\xi - \xi_1)) d\xi_1 \\ & \leq c 2^{k+m/2} \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned} & \iint |H_{P,P}(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 \\ & \leq \int_{|\xi_1 - \xi/2| < 2^{k/2-1}} d\xi_1 \int \gamma_m(\tau - \sigma_1 - P(\xi_1) - P(\xi - \xi_1)) d\sigma_1 \\ & \quad + \int \gamma_k(\sigma_1) d\sigma_1 \int_{|\xi_1 - \xi/2| \geq 2^{k/2-1}} \gamma_m(\tau - \sigma_1 - P(\xi_1) - P(\xi - \xi_1)) d\xi_1 \\ & \leq 2^{k/2+m+1} + 2^{-k/2} \int \gamma_k(\sigma_1) d\sigma_1 \int \gamma_m(\eta_1) d\eta_1 \\ & \leq c 2^{k/2+m} \end{aligned}$$

を得る. 従って, 補題 2.2 より (3.6) が成り立つ.

次に, $|j - \ell| \geq 3$ と仮定する. $\gamma_j(\xi_1)\gamma_\ell(\xi - \xi_1) \neq 0$ のとき, $2^{j-1} < |\xi_1| < 2^{j+1}$, $2^{\ell-1} < |\xi - \xi_1| < 2^{\ell+1}$ であるから,

$$|2\xi - 4\xi_1| \geq \begin{cases} 2|\xi_1| - 2|\xi - \xi_1| > 2^j - 2^{\ell+2} \geq 2^{j-1} & (j \geq \ell + 3 \text{ のとき}), \\ 2|\xi - \xi_1| - 2|\xi_1| > 2^\ell - 2^{j+2} \geq 2^{\ell-1} & (\ell \geq j + 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ. よって, 変数変換 (3.8) をすると, $|\frac{d\eta_1}{d\xi_1}| = |2\xi - 4\xi_1| \geq 2^{j \vee \ell - 1}$ であるから,

$$\begin{aligned} & \iint |H_{P,P}(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 \\ & \leq \int d\sigma_1 \int |\varphi_h(\xi) \gamma_k(\sigma_1) \gamma_m(\tau - \sigma_1 - P(\xi_1) - P(\xi - \xi_1))| d\xi_1 \\ & \leq 2^{-j \vee \ell} \int \gamma_k(\sigma_1) d\sigma_1 \int \gamma_m(\eta_1) d\eta_1 \leq 2^{k+m-j \vee \ell+4} \end{aligned}$$

を得, (3.7) が証明できた.

補題 3.3 $P(\xi) = \pm \xi^2$, Q を C^∞ 実数値関数とする.

$$(3.9) \quad \|\varphi_n(\tau - P(\xi)) \hat{f}_{jk,Q} * \hat{g}_{\ell m,P}\|_{L^2} \leq c 2^{(n+m-j)/2} \|f_{jk,Q}\|_{L^2} \|g_{\ell m,P}\|_{L^2},$$

$$(3.10) \quad \|\varphi_n(\tau - P(\xi)) \hat{f}_{jk,Q} * \hat{g}_{\ell m,-P}\|_{L^2} \leq c 2^{(m \wedge n/2) + (m \vee n/4)} \|f_{jk,Q}\|_{L^2} \|g_{\ell m,-P}\|_{L^2}.$$

$|j - \ell| \geq 3$ と仮定すると,

$$(3.11) \quad \|\varphi_n(\tau - P(\xi)) \hat{f}_{jk,Q} * \hat{g}_{\ell m,-P}\|_{L^2} \leq c 2^{(n+m-j \vee \ell)/2} \|f_{jk,Q}\|_{L^2} \|g_{\ell m,-P}\|_{L^2}.$$

証明. $\sigma = \tau - P(\xi)$ とおき, $\eta = \sigma - \tau_1 + P(\xi) - P(\xi - \xi_1)$ と変数変換すると,
 $\left| \frac{d\eta}{d\xi} \right| = |2\xi_1|$ であるから,

$$\int \gamma_m(\sigma - \tau_1 + P(\xi) - P(\xi - \xi_1)) d\xi \leq 2^{-j} \int \gamma_m(\eta) d\eta \leq 2^{m-j+2}.$$

よって,

$$\begin{aligned} & \iint |\varphi_n(\tau - P(\xi)) H_{Q,P}(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1)|^2 d\xi d\tau \\ & \leq \int |\varphi_n(\sigma)| d\sigma \int |\gamma_m(\sigma - \tau_1 + P(\xi) - P(\xi - \xi_1))| d\xi \leq 2^{n+m-j+4} \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, (3.5) より (3.9) を得る.

次に, $\eta = \sigma - \tau_1 + P(\xi) + P(\xi - \xi_1)$ とおく. $\left| \frac{d\eta}{d\xi} \right| = |4\xi - 2\xi_1|$ であるから,

$$\begin{aligned} & \iint |\varphi_n(\tau - P(\xi)) H_{Q,-P}(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1)|^2 d\xi d\tau \\ & = \iint |\varphi_n(\sigma)|^2 \gamma_m(\sigma - \tau_1 + P(\xi) + P(\xi - \xi_1)) d\xi d\sigma \\ & \leq \int |\varphi_n(\sigma)|^2 d\sigma \left\{ \int_{|\xi - \xi_1/2| < 2^{m/2-1}} d\xi \right. \\ & \quad \left. + \int_{|\xi - \xi_1/2| \geq 2^{m/2-1}} \gamma_m(\sigma - \tau_1 + P(\xi) + P(\xi - \xi_1)) d\xi \right\} \\ & \leq \int |\varphi_n(\sigma)|^2 d\sigma \left\{ 2^{m/2} + 2^{-m/2-1} \int \gamma_m(\eta) d\eta \right\} \\ & \leq 2^{n+m/2+3} \end{aligned}$$

を得る。同様にして,

$$\begin{aligned}
& \iint |\varphi_n(\tau - P(\xi))H_{Q,-P}(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1)|^2 d\xi d\tau \\
& \leq \int |\varphi_n(\sigma)|^2 d\sigma \int_{|\xi - \xi_1/2| < 2^{n/2-1}} d\xi \int \gamma_m(\sigma - \tau_1 + P(\xi) + P(\xi - \xi_1)) d\sigma \\
& \quad + \int |\varphi_n(\sigma)|^2 d\sigma \int_{|\xi - \xi_1/2| \geq 2^{n/2-1}} \gamma_m(\sigma - \tau_1 + P(\xi) + P(\xi - \xi_1)) d\xi \\
& \leq 2^{m+n/2+3}
\end{aligned}$$

が成り立つので, (3.10) を得る.

(3.11) に関しても同様の議論をする.

$\gamma_j(\xi_1)\gamma_\ell(\xi - \xi_1) \neq 0$ のとき,

$$|4\xi - 2\xi_1| \geq 2|\xi_1| - 4|\xi - \xi_1| > 2^j - 2^{\ell+3} = 2^{j-1} \quad (j \geq \ell + 4 \text{ のとき}),$$

$$|4\xi - 2\xi_1| \geq 4|\xi - \xi_1| - 2|\xi_1| > 2^{\ell+1} - 2^{j+2} \geq 2^{\ell-1} \quad (\ell \geq j + 4 \text{ のとき})$$

であるので, 変数変換 $\eta = \sigma - \tau_1 + P(\xi) + P(\xi - \xi_1)$ をすると,

$$\left| \frac{d\eta}{d\xi} \right| = |4\xi - 2\xi_1| \geq 2^{j \vee \ell - 1} \text{ であるから,}$$

$$\begin{aligned}
& \iint |\varphi_n(\tau - P(\xi))H_{Q,-P}(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1)|^2 d\xi d\tau \\
& \leq \int d\sigma \int |\varphi_n(\sigma)|^2 \gamma_m(\sigma - \tau_1 + P(\xi) + P(\xi - \xi_1)) d\xi \\
& \leq 2^{-j \vee \ell + 1} \int |\varphi_n(\sigma)|^2 d\sigma \int \gamma_m(\eta) d\eta \leq 2^{n+m-j \vee \ell + 5}.
\end{aligned}$$

である. よって, (3.11) を得る.

補題 3.4 $P(\xi) = \pm \xi^2$, Q を C^∞ 実数値関数とする.

$h \leq j \vee \ell - 3$ であれば,

$$(3.12) \quad \|\varphi_h(\xi) \hat{f}_{jk,P} * \hat{g}_{\ell m,P}\|_{L^2} \leq c 2^{(k+m-j \vee \ell)/2} \|f_{jk,P}\|_{L^2} \|g_{\ell m,P}\|_{L^2},$$

$h \leq j \vee \ell - 4$ であれば,

$$(3.13) \quad \|\varphi_{hn,P}(\xi, \tau) \hat{f}_{jk,Q} * \hat{g}_{\ell m,-P}\|_{L^2} \leq c 2^{(n+m-j \vee \ell)/2} \|f_{jk,Q}\|_{L^2} \|g_{\ell m,-P}\|_{L^2}$$

が成り立つ.

証明. $\varphi_h(\xi)\gamma_j(\xi_1)\gamma_\ell(\xi - \xi_1) \neq 0$ のとき, $|\xi| < 2^{h+1}, 2^{j-1} < |\xi_1| < 2^{j+1}, 2^{\ell-1} < |\xi - \xi_1| < 2^{\ell+1}$ であるから,

$$j > \ell, h \leq j - 3 \text{ のとき, } |2\xi - 4\xi_1| \geq 4|\xi_1| - 2|\xi| > 2^{j+1} - 2^{h+2} \geq 2^j,$$

$j \leq \ell, h \leq \ell - 3$ のとき, $|2\xi - 4\xi_1| \geq 4|\xi - \xi_1| - 2|\xi| > 2^{\ell+1} - 2^{h+2} \geq 2^\ell$.
 よって, 変数変換 (3.8) をすると, $|\frac{d\eta_1}{d\xi_1}| = |2\xi - 4\xi_1| \geq 2^{j\vee\ell}$ となるので,

$$\begin{aligned} & \iint |\varphi_h(\xi) H_{P,P}(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 \\ & \leq \int \gamma_k(\sigma_1) d\sigma_1 \int |\varphi_h(\xi)|^2 \gamma_m(\tau - \sigma_1 - P(\xi_1) - P(\xi - \xi_1)) d\xi_1 \\ & \leq 2^{-j\vee\ell} \int \gamma_k(\sigma_1) d\sigma_1 \int \gamma_m(\eta_1) d\eta_1 \leq 2^{k+m-j\vee\ell+4}. \end{aligned}$$

となり, (3.12) を得る.

次に (3.13) を示す. $\varphi_h(\xi) \gamma_j(\xi_1) \gamma_\ell(\xi - \xi_1) \neq 0$ のとき, $|\xi| < 2^{h+1}, 2^{j-1} < |\xi_1| < 2^{j+1}, 2^{\ell-1} < |\xi - \xi_1| < 2^{\ell+1}$. 従って,

$$j > \ell, h \leq j - 4 \text{ のとき, } |4\xi - 2\xi_1| \geq 2|\xi_1| - 4|\xi| > 2^j - 2^{h+3} \geq 2^{j-1},$$

$$j \leq \ell, h \leq \ell - 4 \text{ のとき, } |4\xi - 2\xi_1| \geq 2|\xi - \xi_1| - 2|\xi| > 2^\ell - 2^{h+2} \geq 2^{\ell-1}.$$

$\eta = \sigma - \tau_1 + P(\xi) + P(\xi - \xi_1)$ と変数変換すると, $|\frac{d\eta}{d\xi}| = |4\xi - 2\xi_1| \geq 2^{j\vee\ell-1}$ であるから,

$$\begin{aligned} & \iint |\varphi_h(\xi) \varphi_n(\tau - P(\xi)) H_{Q,-P}(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1)|^2 d\xi d\tau \\ & \leq \int d\sigma \int |\varphi_h(\xi)|^2 \varphi_n(\sigma) \gamma_m(\sigma - \tau_1 + P(\xi) + P(\xi - \xi_1)) d\xi \\ & \leq 2^{-j\vee\ell+1} \int \gamma_n(\sigma) d\sigma \int \gamma_m(\eta) d\eta \leq 2^{n+m-j\vee\ell+5}. \end{aligned}$$

よって, (3.13) が成り立つ.

4 定理 3 の証明

$\varphi_{hn,P}(\xi, \tau) := \varphi_h(\xi) \varphi_n(\tau - P(\xi)), \hat{f}_{jk,Q}(\xi, \tau) := \varphi_{jk,Q}(\xi, \tau) \hat{f}(\xi, \tau)$ と書くことにし,
 $f = \sum_{j,k} f_{jk,Q}, g = \sum_{\ell,m} g_{\ell m,Q}$ であることに注意すると,

$$(4.1) \quad fg = \sum_{j,k,\ell,m} f_{jk,Q} g_{\ell m,Q},$$

である.

まず次の補題 が成り立つ:

補題 4.1 P, Q を実数値 C^∞ 関数とする.

$\|\varphi_h(\xi) \hat{f}_{jk,P} * \hat{g}_{\ell m,Q}(\xi, \tau)\|_{L^2} \neq 0$ であれば, $h \leq j \vee \ell + 2$ である.

さらに, $|j - \ell| \geq 3$ であれば, $h \geq j \vee \ell - 2$ であり, $h \leq j \vee \ell - 3$ であれば, $|j - \ell| \leq 2$ である.

証明. $\|\varphi_h(\xi)\hat{f}_{jk,P} * \hat{g}_{\ell m,Q}(\xi, \tau)\|_{L^2} \neq 0$ であれば, $2^{h-1} < |\xi| < 2^{h+1}, 2^{j-1} < |\xi_1| < 2^{j+1}, 2^{\ell-1} < |\xi - \xi_1| < 2^{\ell+1}$ をみたす ξ と ξ_1 が存在する.

よって $2^{h-1} < |\xi| \leq |\xi_1| + |\xi - \xi_1| < 2^{j+1} + 2^{\ell+1} \leq 2^{j \vee \ell + 2}$ であり, これよりこのとき $h \leq j \vee \ell + 2$ である.

$\ell \leq j - 3$ のとき, $2^{h+1} > |\xi| \geq |\xi_1| - |\xi - \xi_1| > 2^{j-1} - 2^{\ell+1} \geq 2^{j-2}$ で, このとき $h \geq j - 2$ となる. 同様に考えると, $j \leq \ell - 3$ のときは $h \geq \ell - 2$ である.

$h \leq j - 3, j \geq \ell$ と仮定すると,

$$2^{\ell+1} > |\xi - \xi_1| \geq |\xi_1| - |\xi| > 2^{j-1} - 2^{h+1} \geq 2^{j-2}$$

となり, よって $\ell \geq j - 2$ である. 同様にして, もし $h \leq \ell - 3, \ell \geq j$ であれば, $j \geq \ell - 2$ となる.

補題 4.2 $P(\xi) = \pm \xi^2$ とする. (a) $\|\varphi_{hn,P}(\xi, \tau)\hat{f}_{jk,P} * \hat{g}_{\ell m,P}(\xi, \tau)\|_{L^2} \neq 0$ と仮定すると, $n \leq \max\{j + \ell + 2, k, m\} + 2$,

$$(4.2) \quad n \geq \begin{cases} j + \ell - 3 & \text{if } k \vee m \leq j + \ell - 4, j > 0, \ell > 0 \\ k \vee m - 2 & \text{if } |k - m| \geq 4, j + \ell + 6 \leq k \vee m, \end{cases}$$

である. (b) $\|\varphi_{hn,P}(\xi, \tau)\hat{f}_{jk,-P} * \hat{g}_{\ell m,-P}(\xi, \tau)\|_{L^2} \neq 0$ と仮定すると, $n \leq \max\{2(j \vee \ell) + 1, k, m\} + 5$,

$$(4.3) \quad n \geq \begin{cases} 2(j \vee \ell) - 3 & \text{if } k \vee m \leq 2(j \vee \ell) - 4, \\ k \vee m - 2 & \text{if } 2(j \vee \ell) + 7 \leq k \vee m, |k - m| \geq 5. \end{cases}$$

である.

Proof. Part (a). $\|\varphi_{hn,P}(\xi, \tau)\hat{f}_{jk,P} * \hat{g}_{\ell m,P}(\xi, \tau)\|_{L^2} \neq 0$ と仮定すると,

$$\begin{aligned} 2^{h-1} &< |\xi| < 2^{h+1}, 2^{j-1} < |\xi_1| < 2^{j+1}, 2^{\ell-1} < |\xi - \xi_1| < 2^{\ell+1}, \\ 2^{n-1} &< |\sigma| < 2^{n+1}, 2^{k-1} < |\sigma_1| < 2^{k+1}, 2^{m-1} < |\sigma - \sigma_1 \pm 2\xi_1(\xi - \xi_1)| < 2^{m+1}, \end{aligned}$$

を満たす ξ, τ, ξ_1, τ_1 が存在する. ただし $\sigma = \tau - P(\xi), \sigma_1 = \tau_1 - P(\xi_1)$ とおく. ここで, 2 の指数が負のとき, 左辺は成り立たない.

$P(\xi) - P(\xi_1) - P(\xi - \xi_1) = \pm 2\xi_1(\xi - \xi_1)$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} 2^{n-1} &< |\sigma| \leq |\sigma - \sigma_1 \pm 2\xi_1(\xi - \xi_1)| + |\sigma_1| + 2|\xi_1(\xi - \xi_1)| \\ &< 2^{m+1} + 2^{k+1} + 2^{j+\ell+3}, \end{aligned}$$

となり, よって $n \leq \max\{j + \ell + 2, k, m\} + 3$.

さらに $k \vee m \leq j + \ell - 4, j > 0, \ell > 0$ と仮定すると,

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &> |\sigma| \geq 2|\xi_1(\xi - \xi_1)| - |\sigma - \sigma_1 \pm 2(\xi_1(\xi - \xi_1))| - |\sigma_1| \\ &> 2^{j+\ell-1} - 2^{m+1} - 2^{k+1} \geq 2^{j+\ell-3}, \end{aligned}$$

となるので $n \geq j + \ell - 3$ となる. $k \geq j + \ell + 6, k \geq m + 4$ と仮定すると,

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &> |\sigma| \geq |\sigma_1| - |\sigma - \sigma_1 \pm 2\xi_1(\xi - \xi_1)| - 2|\xi_1(\xi - \xi_1)| \\ &> 2^{k-1} - 2^{m+1} - 2^{j+\ell+3} \geq 2^{k-2}, \end{aligned}$$

となるので $n \geq k - 2$ となる. 同様にすれば $m \geq j + \ell + 6, m \geq k + 4$ のときは $n \geq m - 2$ であることがわかる.

(b). $\|\varphi_{hn,P}(\xi, \tau) \hat{f}_{jk,-P} * \hat{g}_{\ell m,-P}(\xi, \tau)\|_{L^2} \neq 0$ と仮定すると,

$$\begin{aligned} 2^{h-1} &< |\xi| < 2^{h+1}, 2^{j-1} < |\xi_1| < 2^{j+1}, 2^{\ell-1} < |\xi - \xi_1| < 2^{\ell+1}, \\ 2^{n-1} &< |\sigma| < 2^{n+1}, 2^{k-1} < |\sigma_1| < 2^{k+1}, 2^{m-1} < |\sigma - \sigma_1 \pm 2(\xi^2 - \xi\xi_1 + \xi_1^2)| < 2^{m+1}, \end{aligned}$$

を満たす ξ, τ, ξ_1, τ_1 が存在する. ただし $\sigma = \tau - P(\xi), \sigma_1 = \tau_1 - P(\xi_1)$ とおく. ($P(\xi) + P(\xi_1) + P(\xi - \xi_1) = \pm 2(\xi^2 - \xi\xi_1 + \xi_1^2)$ であることに注意する). $2(\xi^2 - \xi\xi_1 + \xi_1^2) = 2(\xi - \xi_1)^2 + 2\xi_1(\xi - \xi_1) + 2\xi_1^2 \leq 32^{2(j \vee \ell)+3}$ であるから,

$$\begin{aligned} 2^{n-1} &< |\sigma| \leq |\sigma - \sigma_1 \pm 2(\xi^2 - \xi\xi_1 + \xi_1^2)| + |\sigma_1| + 2|\xi^2 - \xi\xi_1 + \xi_1^2| \\ &< 2^{m+1} + 2^{k+1} + 32^{2(j \vee \ell)+3}, \end{aligned}$$

となるので, $n \leq \max\{2(j \vee \ell) + 1, k, m\} + 4$ を得る. また,

$$\begin{aligned} 2\xi^2 - 2\xi\xi_1 + 2\xi_1^2 &= 2(\xi - \frac{\xi_1}{2})^2 + \frac{3}{2}\xi_1^2 \geq \frac{3}{2}\xi_1^2, \\ 2\xi^2 - 2\xi\xi_1 + 2\xi_1^2 &= \frac{1}{2}(\xi + \xi_1)^2 + \frac{3}{2}(\xi - \xi_1)^2 \geq \frac{3}{2}(\xi - \xi_1)^2, \end{aligned}$$

であるので, $2\xi^2 - 2\xi\xi_1 + 2\xi_1^2 \geq 32^{2(j \vee \ell)-4}$ である. よって, $k \vee m \leq 2(j \vee \ell) - 3$ のとき,

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &> |\sigma| \geq 2|\xi^2 - \xi\xi_1 + \xi_1^2| - |\sigma - \sigma_1 \pm 2(\xi^2 - \xi\xi_1 + \xi_1^2)| - |\sigma_1| \\ &> 32^{2(j \vee \ell)-3} - 2^{m+1} - 2^{k+1} \geq 2^{2(j \vee \ell)-3}, \end{aligned}$$

となり $n \geq 2(j \vee \ell) - 3$ を得る.

最後に,

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &> |\sigma| \geq |\sigma_1| - |\sigma - \sigma_1 \pm 2(\xi^2 - \xi\xi_1 + \xi_1^2)| - 2|\xi^2 - \xi\xi_1 + \xi_1^2| \\ &> 2^{k-1} - 2^{m+1} - 32^{2(j \vee \ell)+3} \end{aligned}$$

であることから, $k \geq 2(j \vee \ell) + 7, k \geq m + 5$ のとき, $n \geq k - 2$ であることがわかり, 同様の計算によって, $m \geq 2(j \vee \ell) + 7, m \geq k + 5$ のとき, $n \geq m - 2$ となることもわかる.

証明終.

さて, 補題 4.1, 補題 4.2 より, (4.1) を分解する式で添え字の集合を次のように 6 個にわけ. すなわち, $Q = P$ のときは,

$$(4.4) \quad \begin{cases} I(1) := \{(j, k, \ell, m); k < j + \ell - 3, m < j + \ell - 3\}, \\ I(2) := \{(j, k, \ell, m); j + \ell - 3 \leq k \leq j + \ell + 3, 0 \leq m < j + \ell - 3\}, \\ I(3) := \{(j, k, \ell, m); j + \ell - 3 \leq m \leq j + \ell + 3, 0 \leq k < j + \ell - 3\}, \\ I(4) := \{(j, k, \ell, m); k \geq j + \ell + 3, 0 \leq m \leq j + \ell - 3\}, \\ I(5) := \{(j, k, \ell, m); m \geq j + \ell + 3, 0 \leq k \leq j + \ell - 3\}, \\ I(6) := \{(j, k, \ell, m); k \geq j + \ell - 3, m \geq j + \ell - 3\}, \end{cases}$$

とし, $Q = -P$ のときは,

$$(4.5) \quad \begin{cases} I(1) := \{(j, k, \ell, m); k < 2(j \vee \ell) - 4, m < 2(j \vee \ell) - 4\}, \\ I(2) := \{(j, k, \ell, m); 2(j \vee \ell) - 4 \leq k \leq 2(j \vee \ell) + 7, 0 \leq m < 2(j \vee \ell) - 4\}, \\ I(3) := \{(j, k, \ell, m); 2(j \vee \ell) - 4 \leq m \leq 2(j \vee \ell) + 7, 0 \leq k < 2(j \vee \ell) - 4\}, \\ I(4) := \{(j, k, \ell, m); k \geq 2(j \vee \ell) + 7, 0 \leq m \leq 2(j \vee \ell) - 4\}, \\ I(5) := \{(j, k, \ell, m); m \geq 2(j \vee \ell) + 7, 0 \leq k \leq j + \ell - 4\}, \\ I(6) := \{(j, k, \ell, m); k \geq 2(j \vee \ell) - 4, m \geq 2(j \vee \ell) - 4\}, \end{cases}$$

として, $F_\nu := \sum_{I(\nu)} f_{jk} g_{\ell m}, \nu = 1, \dots, 6$ とおくと, $f g = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6$ となる.

F_1 の評価.

F_1 をつぎのように 3 つの部分にわけ. $F_1 = F_{11} + F_{12} + F_{13}$, ただし $F_{11} := \sum_{I(1)} f_{0k} g_{\ell m}, F_{12} := \sum_{I(1)} f_{jk} g_{0m}, F_{13} := \sum_{I(1), j \geq 1, \ell \geq 1} f_{jk} g_{\ell m}$ とする.

$F_{11} + F_{12}$ の評価. $(0, k, \ell, m) \in I(1)$ であれば, $0 \leq k \leq \ell - 3$ なので, 補題 4.1 と評価 (3.7) より,

$$\begin{aligned} \|F_{11}\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,-1/2)}} &\leq \sum_{\ell \geq 3} \sum_{k,m} \sum_{h=\ell-2}^{\ell+2} \sum_n \rho(2^h) 2^{-n/2} \|f_{0k} g_{\ell m}\|_{L^2} \\ &\leq c \sum_{\ell \geq 3} \sum_{k,m} \rho(2^\ell) 2^{(k+m-\ell)/2} \|f_{0k}\|_{L^2} \|g_{\ell m}\|_{L^2} \\ &\leq c \|f\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}} \|g\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}} \end{aligned}$$

である. $F_{12} := \sum_{(j,k,0,m) \in I(1)} f_{jk} g_{0m} = \sum_{(0,k,\ell,m) \in I(1)} g_{0k} f_{\ell m}$ であるから, $\|F_{12}\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,-1/2)}} \leq c \|f\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}} \|g\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}}$ もわかる.

F_{13} の評価. $Q = P$ のとき. 補題 4.2, (3.6), (3.12) より,

$$\begin{aligned}
& \|F_{13}\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,-1/2)}} \\
& \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \rho(2^h) 2^{-n/2} \sum_{(j,k,\ell,m) \in I(1)} \|\varphi_{hn,P}(\xi, \tau) \hat{f}_{jk,Q} * \hat{g}_{\ell m,Q}(\xi, \tau)\|_{L^2} \\
& \leq \sum_{(j,k,\ell,m) \in I(1)} \sum_{n=j+\ell-3}^{j+\ell+4} 2^{-n/2} \left\{ \sum_{h=0}^{j\vee\ell-4} + \sum_{h=j\vee\ell-3}^{j\vee\ell+2} \right\} \rho(2^h) \|\varphi_h(\xi) \hat{f}_{jk,Q} * \hat{g}_{\ell m,Q}(\xi, \tau)\|_{L^2} \\
& \leq c \sum_{(j,k,\ell,m) \in I(1)} 2^{(k+m)/2 - (j\vee\ell+j+\ell)/2} \|f_{jk,Q}\|_{L^2} \|g_{\ell m,Q}\|_{L^2} \\
& \quad + c \sum_{(j,k,\ell,m) \in I(1)} (1+j\vee\ell) 2^{(k+m)/2 + s(j\vee\ell) - (j+\ell)/2} \|f_{jk,Q}\|_{L^2} \|g_{\ell m,Q}\|_{L^2} \\
& \leq c \|f\|_{B_{2,1,Q}^{(s,1/2)}} \|g\|_{B_{2,1,Q}^{(s,1/2)}}
\end{aligned}$$

が成り立つ. $Q = -P$ のときは $\sum_{n=j+\ell-2}^{j+\ell+4}$ を $\sum_{n=2(j\vee\ell)-2}^{2(j\vee\ell)+5}$ におきかえて同様に計算できる.

F_2 の評価.

$Q = P$ の評価.

$(j, k, \ell, m) \in I(2)$ であれば, $j + \ell - 3 \leq k \leq j + \ell + 3$ なので, 補題 4.1, 補題 4.2, (3.9) より,

$$\begin{aligned}
(4.6) \quad & \|F_2\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,-1/2)}} \\
& \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \rho(2^h) 2^{-n/2} \sum_{(j,k,\ell,m) \in I(2)} \|\varphi_{hn,P}(\xi, \tau) \hat{f}_{jk,P} * \hat{g}_{\ell m,P}(\xi, \tau)\|_{L^2} \\
& \leq \sum_{(j,k,\ell,m) \in I(2)} \sum_{h=0}^{j\vee\ell-4} \rho(2^h) \sum_{n=0}^{j+\ell+5} 2^{-n/2} \|\varphi_{hn,P}(\xi, \tau) \hat{f}_{jk,P} * \hat{g}_{\ell m,P}(\xi, \tau)\|_{L^2} \\
& \quad + \sum_{(j,k,\ell,m) \in I(2)} \sum_{h=j\vee\ell-3}^{j\vee\ell+2} \rho(2^h) \sum_{n=0}^{j+\ell+5} 2^{-n/2} \|\varphi_{hn,P}(\xi, \tau) \hat{f}_{jk,P} * \hat{g}_{\ell m,P}(\xi, \tau)\|_{L^2} \\
& \leq c \sum_{|j-\ell| \leq 2} \sum_{k,m} (j+\ell+6) 2^{(k+m)/2 - (j+\ell+j)/2} \|f_{jk,Q}\|_{L^2} \|g_{\ell m,P}\|_{L^2} \\
& \quad + c \sum_{(j,k,\ell,m) \in I(2)} (j+\ell+6) (1+j\vee\ell) 2^{s(j\vee\ell) + (k+m-2j-\ell)/2} \|f_{jk,P}\|_{L^2} \|g_{\ell m,P}\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

を得る. 右辺第二項は, $(j+\ell+6)(1+j\vee\ell) 2^{s(j\vee\ell) - (s+1/2)(j+\ell)} \leq 2(j\vee\ell+2)^2 2^{-(j\vee\ell)/4}$ が有界であるので, $c\|f\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}} \|g\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}}$ でおさえられる.

右辺第一項は明らかに, $c\|f\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,1/2)}}\|g\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}}$ と $c\|f\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}}\|g\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,1/2)}}$ でおさえられる. また, $s > -3/4$ であれば, 右辺第一項は明らかに, $c\|f\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}}\|g\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}}$ でおさえられる.

また, $b > 1/2, s \geq -3/4$ であれば, (4.6) の右辺第一項は,

$$\sum_{j,k,\ell,m} (j+\ell+6)2^{bk+\{m-j-\ell-j\vee\ell\}-(2b-1)(j+\ell)/2}\|f_{jk,P}\|_{L^2}\|g_{\ell m,P}\|_{L^2} \leq c\|f\|_{B_{2,1,P}^{(-3/4,b)}}\|g\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}}$$

で評価できる.

$Q = -P$ のときは, (3.10) と (3.13) を使い, $\sum_{n=0}^{j+\ell+5}$ を $\sum_{n=0}^{2(j\vee\ell)+5}$ におきかえて同様に計算できる.

F_3 の評価.

$$F_3 = \sum_{(j,k,\ell,m) \in I(3)} f_{jk,Q} g_{\ell m,Q} = \sum_{(j,k,\ell,m) \in I(2)} g_{jk,Q} f_{\ell m,Q}$$

であるから, F_2 のノルムの評価より,

$$(4.7) \quad \|F_3\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,-1/2)}} \leq \begin{cases} c\|g\|_{B_{2,1,Q}^{(\rho,1/2)}}\|f\|_{B_{2,1,Q}^{(s,1/2)}} & , \\ c\|g\|_{B_{2,1,Q}^{(s,1/2)}}\|f\|_{B_{2,1,Q}^{(\rho,1/2)}} & , \\ c\|g\|_{B_{2,1,Q}^{(s,1/2)}}\|f\|_{B_{2,1,Q}^{(s,1/2)}} & \text{if } s > -3/4, \\ c\|g\|_{B_{2,1,Q}^{(s,b)}}\|f\|_{B_{2,1,Q}^{(s,1/2)}} & \text{if } b > 1/2, s \geq -3/4 \end{cases}$$

を得る.

F_4 の評価.

$Q = P$ のとき.

補題 4.2 より, $(j,k,\ell,m) \in I(4)$ であれば, $\|\varphi_{hn,P}(\xi, \tau) \hat{f}_{jk,P} * \hat{g}_{\ell m,P}(\xi, \tau)\|_{L^2} \neq 0$ のとき, $k-4 \leq n \leq k+2, k \geq j+\ell+5$ であるので, (3.1) より,

$$\begin{aligned} & \|F_4\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,-1/2)}} \\ & \leq \sum_{(j,k,\ell,m) \in I(4)} \sum_{h=0}^{\infty} \rho(2^h) \sum_{n=k-4}^{k+2} 2^{-n/2} \|\varphi_{hn,P}(\xi, \tau) \hat{f}_{jk,P} * \hat{g}_{\ell m,P}(\xi, \tau)\|_{L^2} \\ & \leq c \sum_{(j,k,\ell,m) \in I(4)} 2^{(k+m+j\wedge\ell)/2-j-\ell} \|f_{jk,P}\|_{L^2} \|g_{\ell m,P}\|_{L^2} \\ & \leq c\|f\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}}\|g\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}} \end{aligned}$$

を得る. 最後の不等式は, $(j\wedge\ell)/2-j-\ell = (-3/4)(j+\ell) - (j\vee\ell-j\wedge\ell)/4$ より成り立つ.

$Q = -P$ のときは, F_4 のノルムの $Q = P$ のときと同様に計算すればよい.

F_5 の評価.

$F_5 = \sum_{(j,k,\ell,m) \in I(4)} g_{jk,Q} f_{\ell m,Q}$ であるから, F_4 のノルムの評価と同様にすればよい.

F_6 の評価.

$Q = P$ の場合だけを考える ($Q = -P$ の場合は同様な議論によって示せる).

$s < -1/2$ のとき, 補題 4.2 と (3.3) より,

$$\begin{aligned}
& \|F_6\|_{B_{2,1,P}^{(s,-1/2)}} \\
& \leq \sum_{(j,k,\ell,m) \in I(6)} \sum_{h=0}^{\infty} \rho(2^h) \sum_{n=0}^{k \vee m + 7} 2^{-n/2} \|\varphi_{hn,P}(\xi, \tau) f_{jk,P} * g_{\ell m,P}(\xi, \tau)\|_{L^2} \\
& \leq c \sum_{h=0}^{\infty} \rho(2^h) 2^{h/2} \sum_{(j,k,\ell,m) \in I(6)} (k \vee m + 8) \|f_{jk,P}\|_{L^2} \|g_{\ell m,P}\|_{L^2} \\
& \leq c \|f\|_{B_{2,1,Q}^{(s,1/2)}} \|g\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}}
\end{aligned}$$

を得る. $k + m \geq 2(j + \ell - 3)$ と $(k \vee m + 8)2^{-(k+m)/8}$ が有界なことを使うことに
より

$$\frac{3}{4}(j + \ell) - \frac{k + m}{2} \leq -\frac{1}{8}(k + m) + 3$$

が示せ, 最後の不等式が成り立つ.

$s \geq -1/2$ のときは, $0 \leq h \leq j \vee \ell + 3$ であるので,

$$\begin{aligned}
& \|F_6\|_{B_{2,1,P}^{(s,-1/2)}} \\
& \leq \sum_{(j,k,\ell,m) \in I(6)} \sum_{h=0}^{j \vee \ell + 3} \rho(2^h) \sum_{n=0}^{k \vee m + 7} 2^{-n/2} \|\varphi_{hn}(\xi, \tau) f_{jk,P} * g_{\ell m,P}(\xi, \tau)\|_{L^2} \\
& \leq c \sum_{(j,k,\ell,m) \in I(6)} \sum_{h=0}^{j \vee \ell + 3} \rho(2^h) 2^{h/2} (k \vee m + 8) \|f_{jk,P}\|_{L^2} \|g_{\ell m,P}\|_{L^2} \\
& \leq c \|f\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}} \|g\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}}
\end{aligned}$$

が成り立つ. 最後の不等式は, $k + m \geq 2(j + \ell - 3)$ であることと $\sum_h \rho(2^h) 2^{-s/2} < \infty$
を用いることによって,

$$\frac{1+s}{2}(j + \ell) - \frac{k + m}{2} \leq \frac{1+s}{2}(j + \ell) + \frac{s-1}{2}(j + \ell - 3) - \frac{1+s}{4}(k + m)$$

が成り立つことからわかる.

定理 3 の証明終.

5 定理 5 と定理 6 の証明

$B_{2,1,P}^{(\rho,b)}$ を $B_{2,1}^{(\rho,b)}$ と略記する.

定理 5 (a) の証明.

(5.1)

$$\mathcal{F}[\psi(t)W(t)u_0(x)](\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-it(\tau-P(\xi))} \psi(t) dt \hat{u}_0(\xi) = \hat{\psi}(\tau - P(\xi)) \hat{u}_0(\xi),$$

であるから, $\sigma = \tau - P(\xi)$ とおくと,

$$\begin{aligned} & \|\psi(t)W(t)u_0(x)\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,b)}} \\ &= c \sum_{j,k} \rho(2^j) 2^{bk} \left\{ \int |\varphi_j(|\xi|) \hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \int |\varphi_k(\tau - P(\xi)) \hat{\psi}(\tau - P(\xi))|^2 d\tau \right\}^{1/2} \\ &= \sum_{j,k} \rho(2^j) 2^{bk} \left\{ \int |\varphi_j(|\xi|) \hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \int |\varphi_k(\sigma) \hat{\psi}(\sigma)|^2 d\sigma \right\}^{1/2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \rho(2^j) \left\{ \int |\varphi_j(|\xi|) \hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \right\}^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{bk} \left\{ \int |\varphi_k(\sigma) \hat{\psi}(\sigma)|^2 d\sigma \right\}^{1/2} \\ &= \|u_0\|_{B_{2,1}^{\rho}} \|\psi\|_{B_{2,1}^b} \end{aligned}$$

となり, 定理 5 (a) が証明できた.

定理 5 (b) の証明. $\hat{f}_{jk,P}(\xi, \tau) := \varphi_j(\xi) \varphi_k(\tau - P(\xi))$, $\hat{\psi}_m(\tau) := \varphi_m(\tau) \hat{\psi}(\tau)$, $F_{jkm,P} := \psi_m(t) \int_0^t W(t-t') f_{jk,P}(x, t') dt'$, とおくと, $f = \sum_{j,k} f_{jk,P}$, $\psi = \sum_m \psi_m$ であるから,

$$(5.2) \quad F(x, t) := \psi(t) \int_0^t W(t-t') f(x, t') dt' = \sum_m \sum_j \sum_k F_{jkm,P}(x, t).$$

である. F を $F = F_1 + F_2$, $F_1 = \sum_j \sum_{k \leq m} F_{jkm,P}$, $F_2 = \sum_j \sum_{k > m} F_{jkm,P}$ と 2 つにわけて評価する.

F_1 の評価. $\sigma = \tau - P(\xi)$, $\sigma' = \tau' - P(\xi)$, $t' = t\theta$ とおいて変数変換すると,

$$\begin{aligned} \hat{F}(\xi, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\tau t} \psi(t) dt \int_0^t e^{i(t-t')P(\xi)} dt' \int e^{it'\tau'} \hat{f}(\xi, \tau') d\tau' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\sigma t} \psi(t) dt \int \hat{f}(\xi, \sigma' + P(\xi)) d\sigma' \int_0^t e^{i\sigma' t'} dt' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\sigma t} t \psi(t) dt \int \hat{f}(\xi, \sigma' + P(\xi)) d\sigma' \int_0^1 e^{i\sigma' \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 d\theta \int \hat{f}(\xi, \sigma' + P(\xi)) d\sigma' \int e^{-i(\sigma - \sigma'\theta)t} t \psi(t) dt \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 d\theta \int (\hat{\psi})'(\sigma - \sigma'\theta) \hat{f}(\xi, \sigma' + P(\xi)) d\sigma', \end{aligned}$$

を得る. よって,

$$(5.3) \quad \hat{F}_1(\xi, \tau) = i \sum_j \sum_{k \leq m} \int_0^1 d\theta \int (\hat{\psi}_m)'(\sigma - \sigma'\theta) \hat{f}_{jk,P}(\xi, \sigma' + P(\xi)) d\sigma'$$

が成り立つ.

一方, $\varphi_n(\sigma) \gamma_k(\sigma') \hat{\psi}_m'(\sigma - \sigma'\theta) \neq 0$ であれば, $|\sigma - \sigma'\theta| < 2^{m+1}$, $|\sigma'| < 2^{k+1}$, $|\sigma| < 2^{n+1}$ なので, $\varphi_n(\tau - P(\xi)) \hat{F}_1(\xi, \tau) \neq 0$ であれば $0 \leq n \leq m+2$ となる. よって, 補題 2.2 と不等式

$$(5.4) \quad \int |\hat{\psi}_m'(\sigma - \sigma'\theta)| d\sigma = \|\hat{\psi}_m'\|_{L^1}, \quad \int |\hat{\psi}_m'(\sigma - \sigma'\theta)| d\sigma' = \frac{1}{\theta} \|\hat{\psi}_m'\|_{L^1}$$

によって,

$$\begin{aligned} (5.5) \quad \|F_1\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,b)}} &\leq c \sum_j \rho(2^j) \sum_{n=0}^{m+2} 2^{bn} \left(\int_0^1 \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} \right) \|\hat{\psi}_m'\|_{L^1} \sum_{k \leq m} \|\hat{f}_{jk}\|_{L^2} \\ &\leq c \sum_j \sum_{k \leq m} \rho(2^j) \|\hat{f}_{jk}\|_{L^2} 2^{(b-1)m} 2^m \|\hat{\psi}_m'\|_{L^1} \\ &\leq c \sum_j \rho(2^j) \sum_k \|\hat{f}_{jk,P}\|_{L^2} 2^{(b-1)k} C_1(\psi) \\ &\leq c C_1(\psi) \|f\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,b-1)}}, \end{aligned}$$

を得る. ただし $C_1(\psi) = \sup_m \{2^m \|\hat{\psi}_m'\|_{L^1}\}$ とする.

F_2 の評価. $\tau' \neq P(\xi) \neq 0$ のとき, $\sigma' = \tau' - P(\xi)$, $\sigma = \tau - P(\xi)$ とおくと,

$$\begin{aligned} (5.6) \quad \hat{F}(\xi, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-it\tau} \psi(t) dt \int_0^t e^{i(t-t')P(\xi)} dt' \int e^{it'\tau'} \hat{f}(\xi, \tau') d\tau' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-it\sigma} \psi(t) dt \int \hat{f}(\xi, \sigma' + P(\xi)) d\sigma' \int_0^t e^{i\sigma't'} dt' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-it\sigma} \psi(t) dt \int \frac{e^{i\sigma't} - 1}{i\sigma'} \hat{f}(\xi, \sigma' + P(\xi)) d\sigma' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{\hat{\psi}(\sigma - \sigma') - \hat{\psi}(\sigma)}{i\sigma'} \hat{f}(\xi, \sigma' + P(\xi)) d\sigma', \end{aligned}$$

であるから, $k > 0$ のとき,

$$(5.7) \quad \hat{F}_{jk,P}(\xi, \tau) = \int \frac{\hat{\psi}_m(\sigma - \sigma') - \hat{\psi}_m(\sigma)}{i\sigma'} \hat{f}_{jk,P}(\xi, \sigma' + P(\xi)) d\sigma'$$

である。そこで F_2 を

$$\begin{aligned}
 (5.8) \quad \hat{F}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_j \sum_{k>m} \int \hat{\psi}_m(\sigma - \sigma') \left\{ \frac{f_{jk,P}(\xi, \sigma' + P(\xi))}{i\sigma'} \right\} d\sigma' \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_j \sum_{k>m} \hat{\psi}_m(\sigma) \int \frac{f_{jk,P}(\xi, \sigma' + P(\xi))}{i\sigma'} d\sigma' \\
 &= F_{21} + F_{22}
 \end{aligned}$$

とわける。

F_{21} の評価. $\hat{\psi}_m(\sigma - \sigma')\gamma_k(\sigma')$ の台で, $|\sigma - \sigma'| < 2^{m+1}$, $|\sigma'| < 2^{k+1}$ であるから, φ_n の台も考慮すれば, $\varphi_n(\sigma)\hat{F}_{21}(\xi, \tau)$ は $0 \leq n \leq k+2$ の範囲を加えればよい。

$\int |\hat{\psi}_m(\sigma - \sigma')| d\sigma = \int |\hat{\psi}_m(\sigma - \sigma')| d\sigma' = \|\hat{\psi}_m\|_{L^1}$ と補題 2.2 を使えば,

$$\begin{aligned}
 (5.9) \quad \|F_{21}\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,b)}} &\leq c \sum_j \rho(2^j) \sum_{n=0}^{k+2} 2^{bn} \|\hat{\psi}_m\|_{L^1} \sum_{k>m} 2^{-k} \|\hat{f}_{jk,P}\|_{L^2} \\
 &\leq c \sum_j \rho(2^j) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{bk-k} \|f_{jk,P}\|_{L^2} \sum_{m=0}^{k-1} \|\hat{\psi}_m\|_{L^1} \\
 &\leq c \sum_j \rho(2^j) \sum_k 2^{(b-1)k} \|\hat{f}_{jk}\|_{L^2} C_2(\psi) \\
 &\leq c C_2(\psi) \|f\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,b-1)}},
 \end{aligned}$$

を得る。ただし $C_2(\psi) = \sum_m \{\|\hat{\psi}_m\|_{L^1}\}$ 。

F_{22} の評価. $\hat{\psi}_m(\sigma) \neq 0$ のとき, $2^{m-1} < |\sigma| < 2^{m+1}$ であるから, $\varphi_n(\sigma)$ の台も考慮すれば, $\varphi_n(\tau - P(\xi))\hat{F}_{22}(\xi, \tau)$ は $m-1 \leq n \leq m+1$ の範囲を加えればよい。一方, Schwarz の不等式より,

$$(5.10) \quad \int \left| \frac{f_{jk,P}(\xi, \sigma' + P(\xi))}{\sigma'} \right| d\sigma' \leq c 2^{-k/2} \|\hat{f}_{jk,P}\|_{L^2(\mathbb{R}_\tau)}$$

であるから, 補題 2.2 より,

$$\begin{aligned}
 (5.11) \quad \|F_{22}\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,b)}} &\leq c \sum_j \rho(2^j) \sum_{n=m-1}^{m+2} 2^{bn} \|\hat{\psi}_m\|_{L^2} \sum_{k>m} 2^{-k/2} \|f_{jk,P}\|_{L^2} \\
 &\leq c \sum_j \rho(2^j) \sum_{k>m} 2^{bm} \|\hat{\psi}_m\|_{L^2} 2^{-k/2} \|f_{jk,P}\|_{L^2} \\
 &\leq c \sum_j \rho(2^j) \sum_{k>m} 2^{(b-1)k} \|f_{jk,P}\|_{L^2} \sum_{m=0}^{k-1} 2^{m/2} \|\hat{\psi}_m\|_{L^2} \\
 &\leq c C_3(\psi) \|f\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,b-1)}}
 \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし $C_3(\psi) = \sum_m \{2^{m/2} \|\psi_m\|_{L^2}\} = \|\psi\|_{B_{2,1}^{1/2}}$ とする。以上により 定理 5 (b) が証明できた。

定理 6 の証明. $g(x) := f(\delta x)$ とおくと,

$$(5.12) \quad \hat{g}(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int e^{-ix\xi} f(\delta x) dx = (2\pi)^{-d/2} \delta^{-d} \int e^{-iy\xi/\delta} dy = \delta^{-d} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)$$

であるから,

$$(5.13) \quad \|g\|_{B_{2,1}^s} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{sj} \|\hat{g}_j\|_{L^2} = \delta^{-d} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{sj} \|\varphi_j(|\xi|) \hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)\|_{L^2} = \delta^{-d/2} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{sj} \|\varphi_j(\delta|\eta|) \hat{f}(\eta)\|_{L^2}$$

である。ここで $\delta = 2^{-p}$, $\eta := 2^p \xi$, p は正整数, とおき, また, $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j = 1$ であることから $\varphi_0(2^{-p}|\eta|) = \sum_{k=0}^p \varphi_k(|\eta|)$ となることに注意すると,

$$\begin{aligned} \|g\|_{B_{2,1}^s} &= 2^{pd/2} \|\varphi_0(2^{-p}|\eta|) \hat{f}(\eta)\|_{L^2} + 2^{pd/2} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{sj} \|\varphi_j(2^{-p}|\eta|) \hat{f}(\eta)\|_{L^2} \\ &= 2^{pd/2} \left\| \sum_{k=0}^p \varphi_k(|\eta|) \hat{f}(\eta) \right\|_{L^2} + 2^{pd/2} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{sj} \|\varphi_1(2^{-j+1-p}|\eta|) \hat{f}(\eta)\|_{L^2} \\ &\leq 2^{p(d/2)-sp} \left\{ \sum_{k=0}^p 2^{sk} \|f_k\|_{L^2} + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{sj+sp} \|f_{j+p}\|_{L^2} \right\} \\ &= 2^{pd/2-sp} \|f\|_{B_{2,1}^s} = \delta^{s-d/2} \|f\|_{B_{2,1}^s}, \end{aligned}$$

となり, 定理 6 が証明できた。

6 主定理の証明

$N(u, \bar{u}) = c_1 u^2 + c_2 \bar{u}^2$ とする。まず, $\lambda > 0$ をパラメーターとする方程式

$$(6.1) \quad \begin{cases} \partial_t v = i\partial_x^2 v + \lambda N(v, \bar{v}), & x, t \in \mathbb{R}, \\ v(x, 0) = v_0(x) \in B_{2,1}^s \end{cases}$$

を考える。

これを解くために, $P(\xi) = -\xi^2$, $s = -3/4$ とし, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を $|t| < 1$ のとき $\psi(t) = 1$ となる関数とする。また, $\alpha = \|v_0\|_{B_{2,1}^s}$,

$$(6.2) \quad v^0 := \psi(t) W(t) v_0, \{W(t)f\}(x, t) = \mathcal{F}_x^{-1} e^{itP(\xi)} \mathcal{F}f(x, t),$$

$$(6.3) \quad B(v, w) := \psi(t) \int_0^t W(t-t') \{c_1 v(x, t') w(x, t') + c_2 \bar{v}(x, t') \bar{w}(x, t')\} dt'$$

と定め, $v = v^0 + \lambda B(v, v)$ を解く. $v = v^0 + w$ とおき,

$$(6.4) \quad \Phi(w) = \lambda B(v, v) = \lambda B(v^0, v^0) + 2\lambda B(v^0, w) + \lambda B(w, w).$$

と定義すると, w の方程式 $w = \Phi(w)$ を解けばよいことになる.

$b > 1/2$ とし,

$$(6.5) \quad X := B_{2,1,P}^{(\rho, 1/2)}, \quad \rho(t) = \log(2+t)t^s$$

と定義すると, 定理 5 より $v^0 \in B_{2,1,P}^{(s,b)}$, $\|v^0\|_{B_{2,1,P}^{(s,b)}} \leq c\alpha$ が成り立ち, 定理 3 より $c_1(v^0)^2 + c_2(\bar{v}^0)^2 \in X$ が成り立つ. また 定理 3, 定理 4, 定理 5 より,

$$(6.6) \quad \|B(w_1, w_2)\|_X \leq C_1 \|w_1\|_X \|w_2\|_X,$$

$$(6.7) \quad B(v^0, v^0) \in X, \quad \|B(v^0, v^0)\|_X \leq C_1 C_0^2 \alpha^2,$$

$$(6.8) \quad \|B(v^0, w)\|_X \leq C_1 C_0 \alpha \|w\|_X,$$

が成り立つ. 従って,

$$(6.9) \quad \|\Phi(w)\|_X \leq \lambda C_1 (C_0^2 \alpha^2 + 2C_0 \alpha \|w\|_X + \|w\|_X^2)$$

を得る. Φ が $M = \{w \in X; \|w\|_X \leq \beta\}$ から M への縮小写像であることを示す. そのために,

$$(6.10) \quad 0 < \alpha < \frac{1}{4\lambda C_0 C_1}$$

と仮定し, β を方程式: $\lambda C_1 C_0^2 \alpha^2 + 2\lambda C_1 C_0 \alpha \beta + \lambda C_1 \beta^2 = \beta$, の小さいほうの解とする. すなわち,

$$(6.11) \quad \beta = \frac{1 - 2C_0 C_1 \lambda \alpha - \sqrt{1 - 4C_0 C_1 \lambda \alpha}}{2C_1 \lambda}$$

とする. そうすると, (6.9) によって, $\|\Phi(w)\|_X \leq \beta$ であることがわかる. つまり Φ は M に M に写す. 同様にして, $w_1, w_2 \in M$ とすると, $\kappa := 2C_1 \lambda \alpha + 2C_1 \lambda \beta = 1 - \sqrt{1 - 4C_1 \lambda \alpha} < 1$ で,

$$\begin{aligned} \|\Phi(w_1) - \Phi(w_2)\|_X &= \lambda \|2B(v^0, w_1 - w_2) + B(w_1 - w_2, w_1 + w_2)\|_X \\ &\leq \lambda (2C_0 C_1 \alpha \|w_1 - w_2\|_X + C_1 \|w_1 - w_2\|_X \{\|w_1\|_X + \|w_2\|_X\}) \\ &\leq \lambda (2C_0 C_1 \alpha + 2C_0 \beta) \|w_1 - w_2\|_X \\ (6.12) \quad &= \kappa \|w_1 - w_2\|_X, \end{aligned}$$

であるから, Φ は縮小写像である. 不動点定理により, $w = \Phi(w)$ の解が M の中でただ一つ存在する.

よって, $v = v^0 + w$ は (6.1) を $t \in (-1, 1)$ で満たすことがわかる.
 $u(x, t) = v(\delta^{-1}x, \delta^{-2}t)$ とおくと, v は方程式

$$(6.13) \quad v_t = iv_{xx} + \delta^2 N(v, \bar{v}), \quad v_0(x) = u_0(\delta x)$$

を満たす. また, $\delta = 2^{-p}$, (p は正整数) を

$$(6.14) \quad 4C_0C_1\|u_0\|_{B_{2,1}^s} < \delta^{-3/4},$$

ととると, 定理 6 より, $\|v_0\|_{B_{2,1}^s} \leq \delta^{-5/4}\|u_0\|_{B_{2,1}^s} < 1/(4\delta^2C_0C_1)$ が成立するので, 方程式 (6.13) は解 v をもつ. よって, $u(x, t) = v(\delta^{-1}x, \delta^{-2}t)$ が半線型 Schrödinger 方程式 (1.4) の区間 $(-\delta^2, \delta^2)$ で解となる.

参考文献

- [1] N. Aronszajn, F. Mulla, and P. Szepczycki, *On spaces of potentials connected with L^p classes* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **13** (1963), 211–306.
- [2] L. Hörmander, *Estimates for translation invariant operators in L^p spaces* Acta Math., **104** (1960), 93–140.
- [3] C.E.Kenig, G.Ponce and L.Vega, *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle*, Comm. Pure Appl. Math. **46**(1993), 527–620.
- [4] C.E.Kenig, G.Ponce and L.Vega, *The Cauchy Problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices*, Duke Math. J. **71**(1993), 1–21.
- [5] C.E.Kenig, G.Ponce and L.Vega, *A bilinear estimates with applications to the KdV equations*, J. Amer. Math. Soc. **9**(1996), 573–603.
- [6] C.E.Kenig, G.Ponce and L.Vega, *Quadratic forms for the 1-D semilinear Schrödinger equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **348**(1996), 3323–3353.
- [7] T. Muramatu, *Interpolation Spaces and Linear Operators*, Kinokuniyashoten, 1985, in Japanese
- [8] K. Nakanishi, H. Takaoka and Y. Tsutsumi, *Counterexamples to bilinear estimates related with the KdV equation and the nonlinear Schrödinger equation*, preprint, 2000